Calculabilitate & Complexități  
Subiectul 4

Complexitate Timp

horizontal line

# Ce tre să știi?

Nota 6:

- modelul de masina Turing pe care se face evaluarea masurii timp

- definitia masurii timp

- definirea claselor de complexitate timp

- comprimarea benzilor (enunturi)

- eliminarea constantelor (enunturi)

- ierarhii de complexitate (enunturi)

Fiecare demonstratie, la alegere: 2p

# Modelul de mașină Turing folosit

Vom folosi mașina Turing cu k benzi infinite la ambele capete. Poate să nu miște capul de citire-scriere la un moment dat. Mașinile considerate se opresc pe fiecare input.



# Definiții

1. **TimeM(n)** = numărul maxim de pași pe care îi face mașina M pentru a decide o intrare de lungime n.
2. **(D/N)TIMEk(f(n))** = {L | există o mașină Turing M **deterministă/nedeterministă** cu **k** benzi astfel încât **L(M) = L** și există n0 cu **TimeM(n)** <= f(n) pentru orice n >= n0}
3. O funcție f(n) se numește **timp construibilă** dacă există o mașină Turing M și un n0 astfel încât **TimeM(n) = f(n)** pentru orice n > n0.
4. O funcție f(n) se numește **timp construibilă complet** dacă există o mașină Turing M astfel încât **TimeM(n) = f(n)** pentru orice n.

# Teoreme

* **Comprimarea timpului de lucru cu un factor constant:**
  + (D/N)TIMEk(f(n)) = (D/N)TIMEk(c f(n)), unde c este o constanta pozitivă nenulă dacă

1. k > 1
2. f(n) / n tinde la infinit când n tinde la infinit

* (D/N)TIMEk(t n) = (D/N)TIMEk((1 + epsilon) n), pentru orice k > 1 și epsilon > 0.
* **Reducerea numarului de benzi:** 
  + ((D/N)TIMEk(f(n)) (D/N)TIME1(f(n)2), pentru orice k > 1 și orice f.
  + ((D/N)TIMEk(f(n)) (D/N)TIME2( f(n)log(f(n)) ), pentru orice k > 1 și orice f.
* Oricare ar fi f(n) recursivă, există un limbaj recursiv L astfel încât L DTIME(f(n)). (L nu aparține lui DTIME(f(n))).

Se aplică și pentru DSPACE, NTIME, NSPACE.

* Fie T1, T2 doua funcții, T2 timp construibila complet. Dacă limita când n tinde la infinit din T1(n)\*log(T1(n)) / T2(n) tinde la 0, atunci există un L care aparține lui DTIME(T2(n)) și nu aparține lui DTIME(T1(n).

Ierarhie

* DTIME(f(n)) DSPACE(f(n))
* DSPACE(f(n)) DTIME(cf(n)), pentru f(n) log(n)
* NTIME(f(n)) NSPACE(f(n))
* NTIME(f(n)) DTIME(cf(n))
* NSPACE(f(n)) DSPACE(f(n)2), pentru f(n) log(n) și f spațiu construibilă complet (Teorema lui Savitch)
* P = , NP =
  + DSPACE(log n) P NP NSPACE = PSPACE și DSPACE(log n) PSPACE

# Demonstrații

### ((D/N)TIMEk(f(n)) (D/N)TIME1(f(n)2), pentru orice k > 1 și orice f.

Fie mașina Turing M cu TimeM(n) = f(n).



Și acum, construim mașina M’ astfel:

* M’ are o singură bandă auxiliară, iar elementele ei vor fi **vectori cu 2k piste:**
  + Pe pista 2 \* i - 1 se află conținutul benzii i a mașinii M
  + Pista 2 \* i conține 0-uri mai puțin pe o poziție - are 1 unde se afla capul de citire-scriere al benzii i a mașinii M.



O pistă poate avea în cel mai rău caz f(n) celule ocupate (deoarece TimeM(n) = f(n), M nu are timp să ocupe mai mult de f(n) celule pe una dintre benzile ei).

Mașina M’:

* Citește conținutul benzii de la stânga la dreapta și memorează simbolurile de pe pistele 2 \* i - 1 aflate imediat deasupra simbolurilor 1 de pe pistele 2 \* i (maxim f(n) pași)
* Actualizează conținutul benzii de la dreapta la stânga:
  + Parcurgerea fiecărei celule: maxim f(n) pași:
    - Actualizarea simbolurilor de pe celula i: 1 pas
    - Dacă un cap de citire scriere aflat pe poziția i al mașinii M se mută la dreapta, trebuie actualizate pistele pare de pe celula din dreapta:
      * Un pas ca să ne mutăm la dreapta cu o poziție
      * Un pas ca să ne întoarcem
  + => 3f(n) pași

Deci, sunt f(n) + 3f(n) = 4f(n) pași care pot fi executați de maxim f(n) ori => 4f(n)) \* f(n).

Nu știm dacă putem aplica teorema pentru eliminarea constantelor pentru că nu știm dacă funcția f este supraliniară. Dar, putem construi mașina M’’ cu L(M’’) = L care face maxim f(n)/2 pași.

Atunci, mașina M’ poate simula în același mod mașina M’’ și va face pași.

### Oricare ar fi f(n) recursivă, există un limbaj recursiv L astfel încât L DTIME(f(n)).

Fie L = { w | w nu este acceptat de M în cel mult f(n) **pași**, unde }.

Notăm cu poziția lui w în mulțimea {0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, ….}.

Codificărilor mașinilor Turing sunt peste alfabetul {0, 1, 2, (, ), L, R}, iar reprezintă numărul de ordine al mașinii M în ordinea dată mai întâi de lungimea codificării și, în caz de egalitate, lexicografic.

Presupunem că există mașina M care acceptă L:

* M are ca input w
* Calculează lungimea lui |w| = n pe o bandă auxiliară
* Calculează f(n) pe aceeași bandă
* Găsește M’ astfel încât
* Simulează mașina M’ pe intrarea w, pentru maxim f(n) pași.
* Acceptă dacă M’ se oprește și respinge sau daca in cei f(n) pasi pentru care a rulat simularea M' nu s-a oprit.

=> L = L(M). Mașina M e deterministă si se oprește pe fiecare intrare.

Am demonstrat că limbajul L e recursiv. Rămâne să demonstrăm că nu aparține lui DTIME(f(n)).

Alegem w cu .

M acceptă în maxim f(n) pași => w nu e acceptat de M - contradicție.

M respinge în maxim f(n) pași => w ar trebui sa fie acceptat de M din definiția lui L - contradicție.

=> M trebuie sa accepte w în mai mult de f(n) pași.

=> TimeM(|w|) > f(|w|), deci L nu aparține lui DTIME(f(n)).